Dokąd on zmierza? Przemieszczenie i prędkość jako wektory

1. Łódź żegluje po morzu...

2. Płynie z **szybkością** 10 węzłów (węzeł to 1 mila morska na godzinę czyli 1,852 km/h) w kierunku 045 stopni (czyli na północny wschód).

3. Gdzie znajdzie się łódź po 10 godzinach żeglugi, jeżeli nic się nie zmieni?

4. Gdyby łódź płynęła w innym kierunku, to wartość przemieszczenia byłaby taka sama (100 mil) ale położenie końcowe byłoby gdzieś na okręgu, którego środek jest w punkcie początkowym...

5. Nie można uważać, że prędkość ma tylko **wartość** (liczbową...). Ma ona także **kierunek i zwrot**.

6. To samo odnosi się do **przemieszczenia**: ma ono **wartość** (ile mil od punktu startu?) oraz **zwrot** (w którą stronę od punktu startu znajduje się punkt końcowy?).

wartość przemieszczenia = 10 mil/h × 10 h = 100 mil

$$\Delta\vec{r} = \vec{v} \times \Delta t$$

przemieszczenie = prędkość × czas

$\Delta\vec{r}$ przemieszczenie

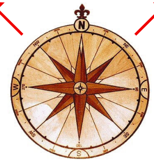
Skala:
1 mm : 1 mila

000 stopni
(lub 360)
północ

315 stopni

045 stopni

270 stopni
zachód



090 stopni
wschód

180 stopni
południe

przebyta droga = 100 mil

$\vec{v}$ prędkość

Skala:
1 węzeł : 1 mm

10 węzłów

(20 mm)

Ile wynosi ta prędkość, jeżeli skala jest taka sama, jak powyżej?

Gdzie znajdowałaby się łódź po 4 godzinach żeglowania w tym kierunku?

Dokąd on zmierza? Zmiany prędkości...

1. Oto łódź żeglująca po morzu...

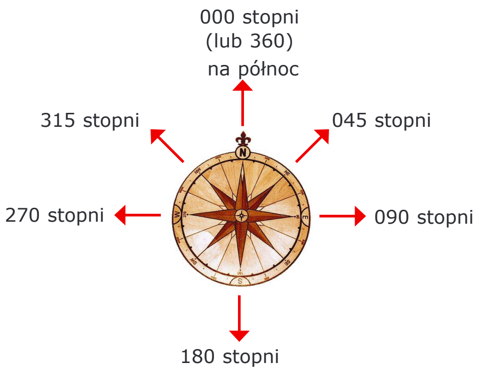
2. Jej prędkość ma kierunek 045 stopni, jej szybkość wynosi 5,0 węzłów. Jeżeli będzie tak płynąć przez godzinę, to...

3. ... a teraz ma nową prędkość o kierunku 090 stopni i wartości 5,0 węzłów. Płynie z taką prędkością przez kolejne 2 godziny...

4. ... nowa prędkość: kierunek 000 stopni, szybkość 7,0 węzłów. Płynie z taką prędkością przez następne 3 godziny...

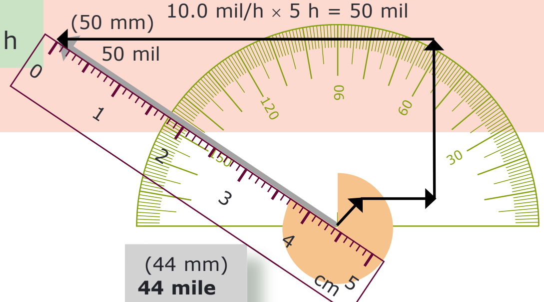
5. ... nowa prędkość: kierunek 270 stopni, szybkość 10,0 węzłów. Płynie z taką prędkością przez kolejne 5 godzin...

6. W jakiej odległości od miejsca startu znajduje się punkt końcowy? W jakim kierunku? Jaka jest całkowita droga przebyta przez łódź?



przemieszczenie = prędkość × czas

prędkość	czas trwania ruchu	przemieszczenie	przebyta droga
Skala: 2 mm : 1 węzeł		Skala: 1 mm : 1 mila	
(10 mm) 5,0 węzłów	1 h	(5 mm) 5 miles 5.0 mil/h × 1 h = 5 mil	5 mil (łącznie 5 mil...)
5,0 węzłów (10 mm)	2 h	5.0 mil/h × 2 h = 10 mil (10 mm) 10 mil	10 mil (łącznie 15 mil...)
(14 mm) 7.0 węzłów	3 h	(21 mm) 21 mil 7.0 mil/h × 3 h = 21 mil	21 mil (łącznie 36 mil...)
10.0 węzłów (20 mm)	5 h	(50 mm) 50 mil 10.0 mil/h × 5 h = 50 mil	50 mil (łącznie 86 mil...)



(44 mm)
44 mile

86 mil (łącznie)

kąt z kierunkiem północnym = 146º – 90º = 56º

kąt mierzony zgodnie z ruchem wskazówek zegara = 360º – 56º = 304º

Model ruchu łodzi

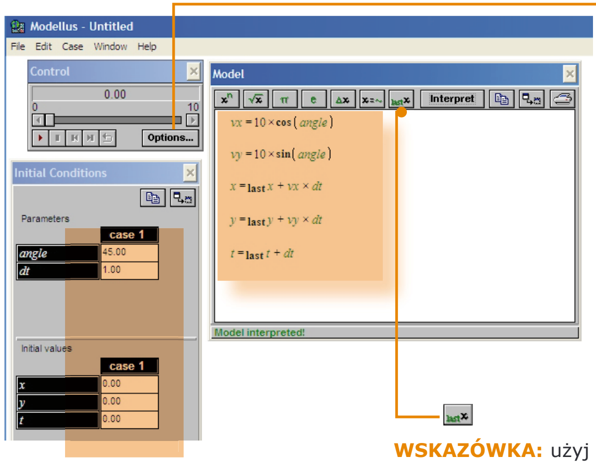
1. Utwórz w programie Modellus przedstawiony tu model (wybierz **Model iteracyjny** i **Maksymalną** liczbę kroków = 10 korzystając z przycisku Opcje w oknie sterowania...)

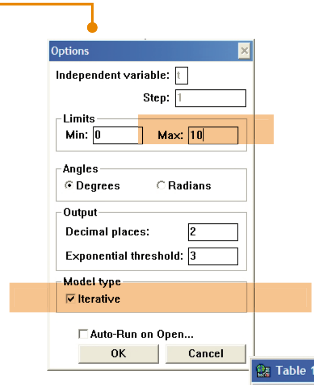
2. Utwórz **obiekt** (model **łódki...**) o współrzędnych *x* oraz *y* (będą to także współrzędne wektora przemieszczenia).

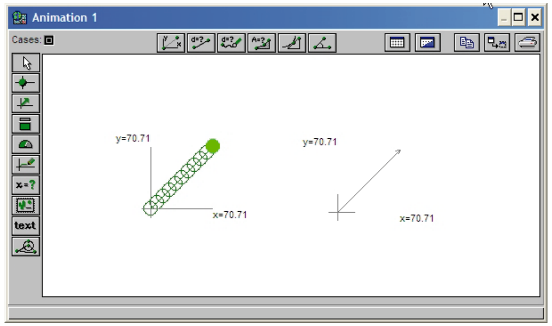
3. Uruchom model i sprawdź jego działanie...

4. Utwórz tabelę i przeglądnij wartości poszczególnych zmiennych

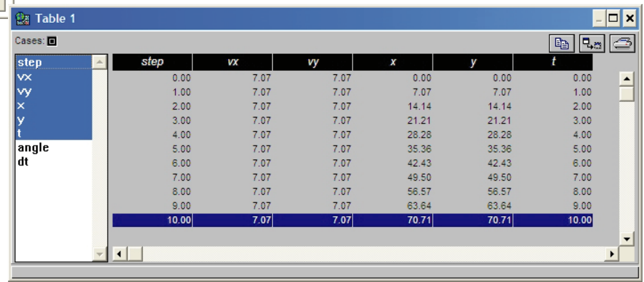
5. Jak daleko odpłynęła łódź? Jakie jest położenie łodzi skoro początek układu współrzędnych był w punkcie startu?







WSKAZÓWKA: użyj przycisku $_{stare}x$ w celu uzyskania poprzedniej wartości danej zmiennej



step	vx	vy	x	y	t
0.00	7.07	7.07	0.00	0.00	0.00
1.00	7.07	7.07	7.07	7.07	1.00
2.00	7.07	7.07	14.14	14.14	2.00
3.00	7.07	7.07	21.21	21.21	3.00
4.00	7.07	7.07	28.28	28.28	4.00
5.00	7.07	7.07	35.36	35.36	5.00
6.00	7.07	7.07	42.43	42.43	6.00
7.00	7.07	7.07	49.50	49.50	7.00
8.00	7.07	7.07	56.57	56.57	8.00
9.00	7.07	7.07	63.64	63.64	9.00
10.00	7.07	7.07	70.71	70.71	10.00

$vx = 10 \times \cos(angle)$ składowa *x* prędkości...

$vy = 10 \times \sin(angle)$ składowa *y* prędkości...

$x = \mathrm{last}\, x + vx \times dt$ nowa wartość składowej *x* = poprzednia wartość składowej *x* + jej przyrost

$y = \mathrm{last}\, y + vy \times dt$ nowa wartość składowej *y* = poprzednia wartość składowej *y* + jej przyrost

$t = \mathrm{last}\, t + dt$ nowa wartość czasu = poprzednia wartość *t* + krok czasowy

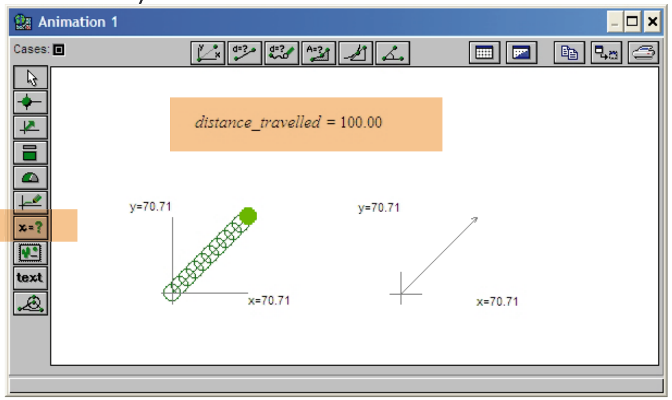
Po wprowadzeniu powyższego modelu dodaj nową iterację:

$$distance\_travelled = \mathrm{last}\, distance\_travelled + \sqrt{\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)}$$

Sprawdź wartości w tabeli lub umieść miernik w oknie animacji w celu obserwacji zmian (symbole pierwiastka kwadratowego i delty można uzyskać klikając na przyciski √x oraz Δx w oknie modelu).

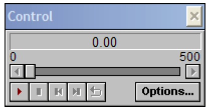
Zmienna *distance_travelled* (= przebyta droga) "akumuluje" wartości zmian położenia (wartości przemieszczenia) w każdej iteracji.

WSKAZÓWKA: *umieść miernik w oknie animacji w celu obserwacji zmian wartości*

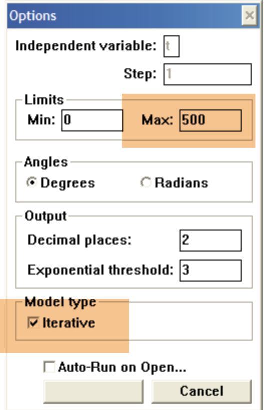


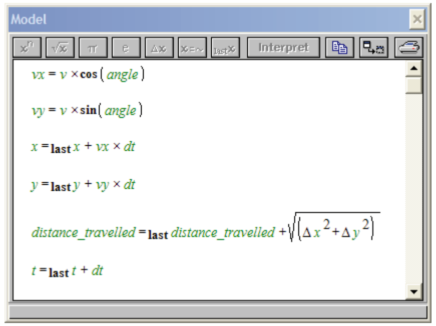
Ruch łodzi ze stałą szybkością ale różnymi prędkościami...

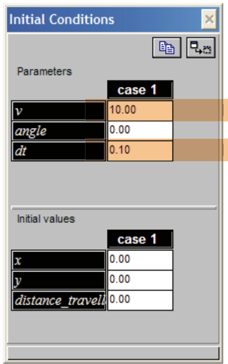
1. Stworzymy teraz model wykorzystujący suwak, przy pomocy którego będzie można zmieniać kierunek wektora prędkości...



2. Edytuj poprzedni model lub utwórz nowy w programie Modellus (nie zapomnij wybrać **Model iteracyjny** i **Maksymalną** liczbę kroków =500 po naciśnięciu przycisku Opcje w oknie sterowania...)



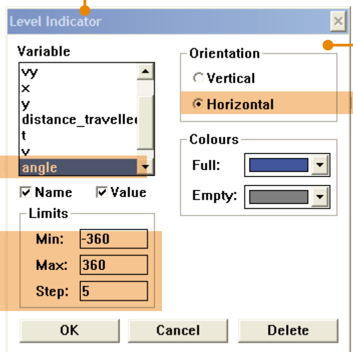




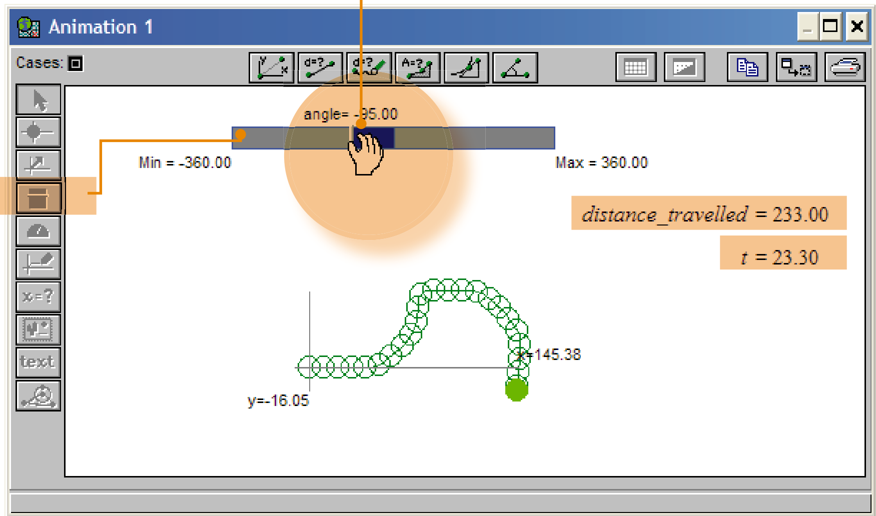
3. Po umieszczeniu obiektu (modelu łódki...) o współrzędnych *x* oraz *y*, umieść w oknie animacji element "wskaźnik wartości"/"suwak poziomy". Nadaj odpowiednie własności umieszczonym obiektom.

4. Uruchom model i zmieniaj wartość kąta.

5. Możesz również umieścić mierniki wskazujące drogę przebytą przez łódkę i upływający czas.



- Przesuwaj suwakiem i zmieniaj kąt, jaki tworzy prędkość z kierunkiem północnym...
- Spróbuj tak poruszać suwakiem, aby łódź powróciła do punktu początkowego...
- Zobacz jak zmienia się przebywana droga...
- Czy prędkość zmienia się? Dlaczego?
- Jeżeli szybkość jest stała, to łatwo można obliczyć przebytą drogę: wystarczy pomnożyć szybkość (wartość prędkości) przez czas trwania ruchu. Sprawdź to...

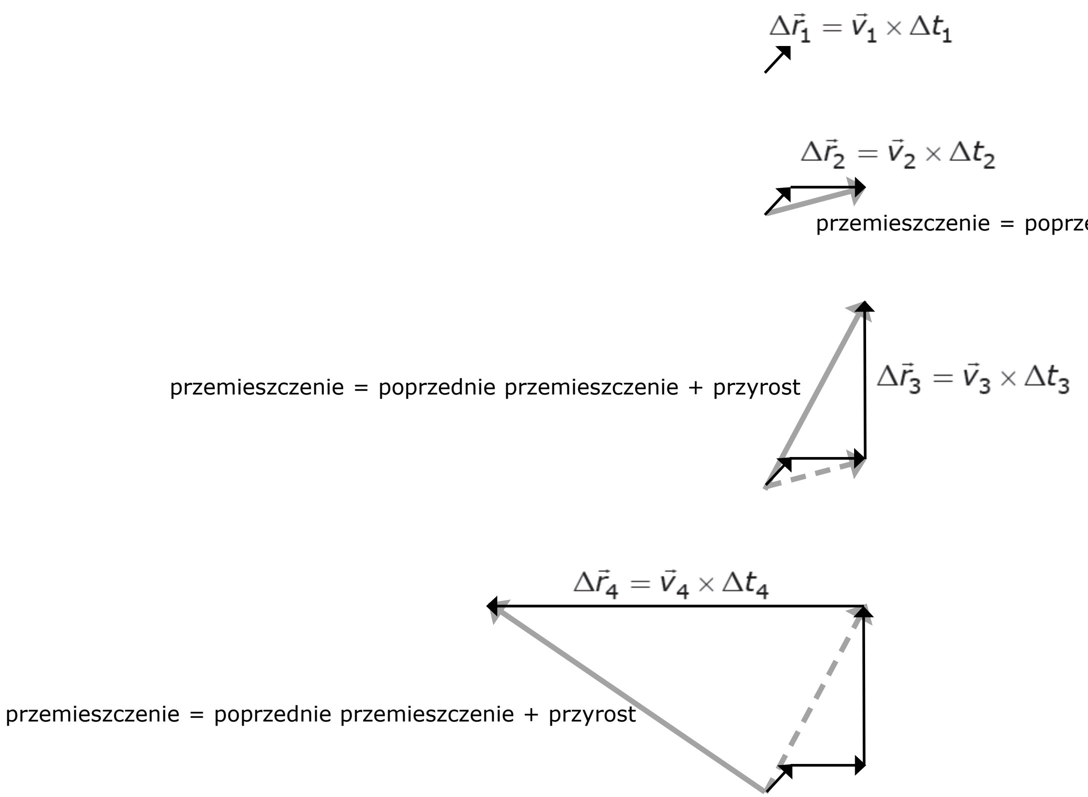


Iteracyjne rozwiązanie równań ruchu

1. Jeżeli ciało porusza się ze **stałą prędkością**, to po czasie Δt jego **przemieszczenie** będzie wynosić $\vec{v} \times \Delta t$ ...

2. Całkowite przemieszczenie można obliczać jako sumę wcześniejszego przemieszczenia i przemieszczenia w bieżącym kroku czasowym...

3. Na tym polega **iteracyjne rozwiązywanie równania ruchu**: *nowy wektor położenia obliczany jest jako suma wcześniejszego wektora położenia i przemieszczenia w bieżącym kroku czasowym.*



Jeżeli Δt jest cały czas takie samo, to możemy napisać...

Dla wektora położenia:

$$\vec{r}_{t+\Delta t} = \vec{r}_t + \vec{v}_t \times \Delta t$$

Dla każdej składowej:

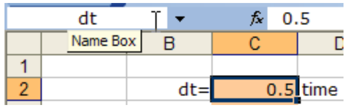
$x = \text{last } x + vx \times dt$

$y = \text{last } y + vy \times dt$

r stanowi przemieszczenie względem początku układu O (czyli wektor położenia w układzie *Oxy*)

Rozwiązanie numeryczne/iteracyjne równań ruchu w arkuszu kalkulacyjnym

WSKAZÓWKA: *W celu zdefiniowania nazwy komórki np. dt dla komórki C2, umieść kursor na tej komórce i wpisz dt (nazwę) w pole nazwy. Zdefiniuj także komórki C3 i C4 jako x0 i y0, czyli wartości początkowe współrzędnych.*



=C7*COS(D7*PI()/180)

=C7*SIN(D7*PI()/180)

WSKAZÓWKA: *W Excelu zapisuje się liczbę π jako PI(). Kąty wyrażone są w radianach. W celu zamiany stopni na radiany należy zastosować współczynnik π/180)*

=x0 =y0 *Wartości początkowe współrzędnych*

=G7+E7*dt

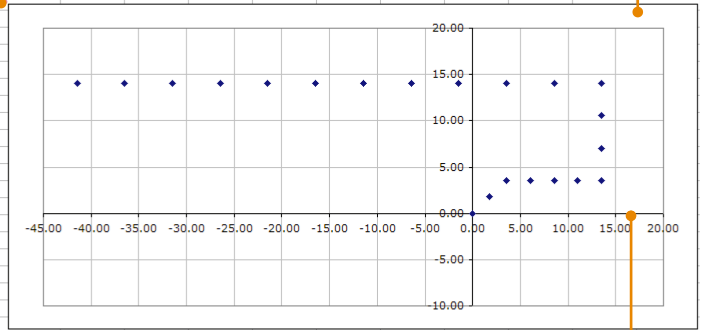
=H7+F7*dt

Kolejna wartość każdej współrzędnej = wartość wcześniejsza + zmiana (składowa prędkości pomnożona przez długość kroku czasowego)

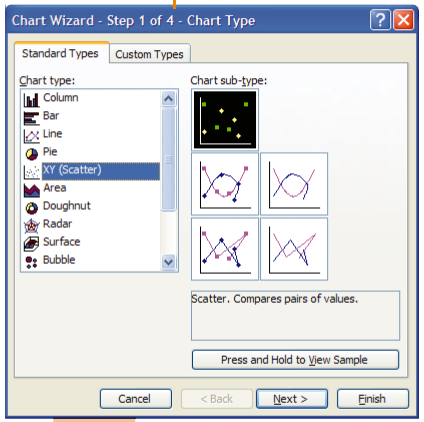
=B7+dt

Krok czasowy wynosi dt, określony w komórce C2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		dt=	0.5	time step in seconds				
3		x0=	0	initial coordinates				
4		y0=	0					
5								
6		t	speed	angle	vx	vy	x	y
7		0.00	5.00	45.00	3.54	3.54	0.00	0.00
8		0.50	5.00	45.00	3.54	3.54	1.77	1.77
9		1.00	5.00	0.00	5.00	0.00	3.54	3.54
10		1.50	5.00	0.00	5.00	0.00	6.04	3.54
11		2.00	5.00	0.00	5.00	0.00	8.54	3.54
12		2.50	5.00	0.00	5.00	0.00	11.04	3.54
13		3.00	7.00	90.00	0.00	7.00	13.54	3.54
14		3.50	7.00	90.00	0.00	7.00	13.54	7.04
15		4.00	7.00	90.00	0.00	7.00	13.54	10.54
16		4.50	10.00	180.00	-10.00	0.00	13.54	14.04
17		5.00	10.00	180.00	-10.00	0.00	8.54	14.04
18		5.50	10.00	180.00	-10.00	0.00	3.54	14.04
19		6.00	10.00	180.00	-10.00	0.00	-1.46	14.04
20		6.50	10.00	180.00	-10.00	0.00	-6.46	14.04
21		7.00	10.00	180.00	-10.00	0.00	-11.46	14.04
22		7.50	10.00	180.00	-10.00	0.00	-16.46	14.04
23		8.00	10.00	180.00	-10.00	0.00	-21.46	14.04
24		8.50	10.00	180.00	-10.00	0.00	-26.46	14.04
25		9.00	10.00	180.00	-10.00	0.00	-31.46	14.04
26		9.50	10.00	180.00	-10.00	0.00	-36.46	14.04
27		10.00	10.00	180.00	-10.00	0.00	-41.46	14.04



Oto wykres punktowy jednej wielkości względem innej (tutaj y względem x)

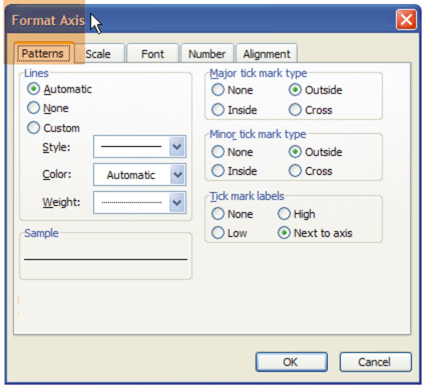


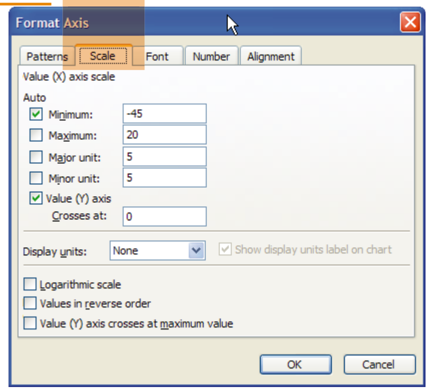
skopiuj to w dół...

skopiuj to w dół...

skopiuj to w dół...

WSKAZÓWKA: *kliknij na każdą z osi w celu określenia jej własności*





WSKAZÓWKA: *Nadaj kolor komórkom, które są niezależne i służą do przypisywania wartości zmiennym niezależnym lub parametrom.*

angle	vx	vy
45.00	3.54	3.5
45.00		
0.00		

WSKAZÓWKA: *w celu skopiowania komórki w dół, umieść kursor w prawym dolnym rogu komórki i przeciągnij ją.*

☐ OK ☐ Muszę to powtórzyć... ☐ Potrzebuję pomocy

Rozwiązanie analityczne (wyrażone jawną funkcją) równań ruchu

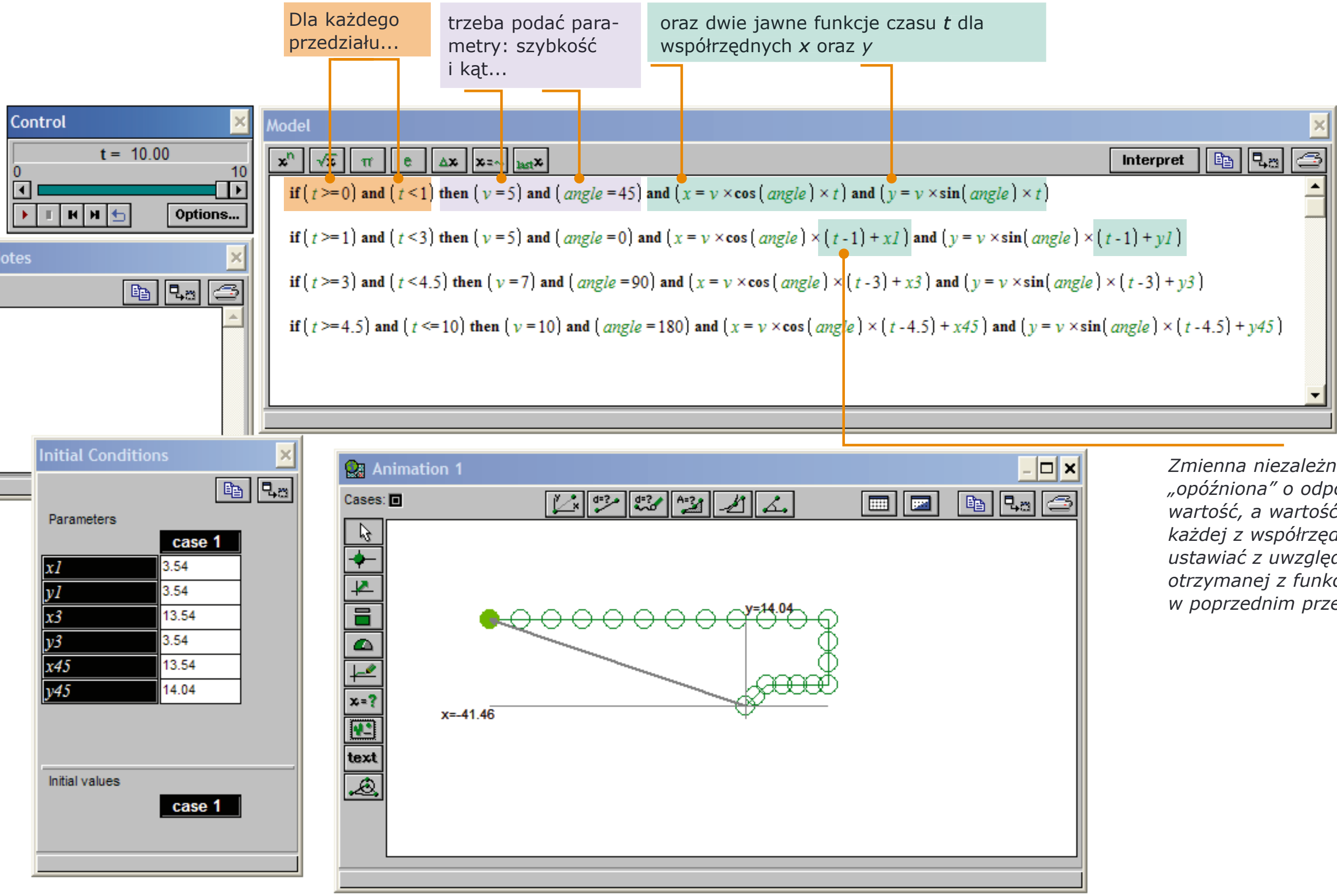
1. Tego modelu nie musisz wprowadzać...

2. Rozwiązanie analityczne to jawna funkcja zmiennej niezależnej (w przypadku ruchu łódki - czasu *t*)...

3. Dla każdego przedziału czasu *t* konieczne jest podanie jaką funkcją czasu są współrzędne *x* oraz *y* i podanie parametrów tej funkcji: szybkości i kierunku prędkości w danym przedziale.

4. W celu uzyskania poprawnego opisania ruchu, w funkcjach zastosowanych dla każdego z przedziałów czasu *t* trzeba uwzględniać wartości początkowe współrzędnych *x* oraz *y* dla każdego z tych przedziałów czasu jak również odpowiednie opóźnienie czasu *t* (wartość początkową *t* w każdym z przedziałów).

5. Jakiego typu jeszcze inne modele (oprócz analitycznych i iteracyjnych/numerycznych) trzeba według Ciebie stosować w programowaniu gier komputerowych do poruszania obiektami? Przedstaw swoje argumenty.



Zmienna niezależna t musi być „opóźniona" o odpowiednią wartość, a wartość „początkową" każdej z współrzędnych trzeba ustawiać z uwzględnieniem wartości otrzymanej z funkcji zastosowanej w poprzednim przedziale...

Sterowanie szybkością i kierunkiem wektora prędkości...

1. Utwórz model taki, jak po prawej (nie zapomnij sprawdzić Opcji... , a w oknie własności początkowych sprawdź cechy elementów kontroli i wartości początkowe wszystkich zmiennych).

2. Model dotyczy każdej ze składowych położenia...

3. Wykorzystaj przycisk „wektor” do stworzenia wektora o składowych v_x i v_y. Wektor ten reprezentuje wartość i kierunek prędkości obiektu (czyli „łodzi”).

4. Uruchom model. Posługuj się myszką do zmieniania wartości i kierunku wektora prędkości łodzi...

5. Przeanalizuj wykresy zależności współrzędnych x i y od czasu. Jaki mają one sens? Czy potrafisz powiedzieć kiedy „łódź” porusza się „szybko”, a kiedy „wolno”?